O TEOREMA DE PITÁGORAS NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA PARA AS DEMONSTRAÇÕESDO TEOREMA

Elaine Cristina dos Santos Silva, Licencianda IFRN, elainecss@hotmail.com.br
Rosângela Araújo da Silva, Orientadora IFRN, rosangela.silva@ifrn.edu.br
Thiago Jefferson de Araújo, Docente IFRN, thiago.araujo@ifrn.edu.br

RESUMO

O presente trabalho é um relato da experiência do ensino do teorema de Pitágoras no Ensino Fundamental II através de demonstrações geométricas adequadas a esse nível de ensino. Sabe-se que a Educação Matemática deve estar sempre voltada para as necessidades dos alunos na construção de seu conhecimento matemático. O uso de materiais manipuláveis no ensino da geometria vem sendo abordado por alguns autores como Lindquist (1994), Lorenzato (2006), Turrioni (2004). Ao associar-se a algumas premissas do construtivismo a utilização de material concreto contribui para o desenvolvimento de habilidades que podem auxiliar na compreensão da geometria. A experiência realizada consistiu em realizar em sala de aula, a demonstração e verificação do teorema de Pitágoras utilizando figuras geométricas. Para tal, utilizamos a demonstração proposta por Henry Perigal em 1873, a demonstração clássica através do quadrado de lado (a+b), a demonstração por semelhança de triângulos e a verificação do teorema através de malha quadriculada. Após um rápido apanhado histórico sobre as demonstrações que seriam realizadas, sob a orientação da professora cada grupo ficou responsável por confeccionar as peças necessárias para sua demonstração ou verificação mediante um “passo-a-passo” fornecido pela professora. Ao fim, todos os grupos conseguiram realizar as demonstrações, alguns com maiores dificuldades do que outros, devido às diferenças na complexidade de cada uma das demonstrações. Como conclusão da atividade os resultados de cada grupo foram socializados com a turma e cada um teve oportunidade de comentar sobre sua experiência nessa atividade. Diante da experiência realizada, pudemos identificar que os alunos aprenderam de forma mais significativa através da manipulação dos materiais concretos do que simplesmente através de manipulações algébricas.

Palavras Chaves: Teorema de Pitágoras; Abordagem Geométrica; Material Manipulável.

INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata-se de uma intervenção em sala de aula, ocorrido na Escola Estadual João Ferreira de Souza, num intercambio entre escolas e bolsistas do curso de licenciatura em Matemática do IFRN, campus Santa Cruz. O mesmo faz parte do programa institucional de bolsa de iniciação à docência, PIBID, programa esse que é financiado pela (CAPES). Essa intervenção se deu por meio de uma oficina com abordagens geométricas do teorema de Pitágoras, usando materiais manipuláveis.

A educação Matemática deve estar sempre voltada para as necessidades dos alunos na construção de seu conhecimento matemático. Para tanto o uso de materiais manipuláveis no ensino da geometria vem sendo abordado por alguns autores como Lindquist (1994), Lorenzato (2006), Turrioni (2004). Ao associar-se a algumas premissas do construtivismo a utilização de material concreto manipuláveis contribui para o desenvolvimento de habilidades que podem auxiliar na compreensão da geometria.

Nossa experiência consistiu em realizar em sala de aula, a demonstração e verificação do teorema de Pitágoras utilizando figuras geométricas. E como material manipulável utilizou-se folhas de papel A4 coloridas, EVA, régua e caneta. Para tal, utilizamos a demonstração proposta por Henry Perigal em 1873 a qual usamos EVA, a demonstração clássica através do quadrado de lado (a+b), a demonstração por semelhança de triângulos e a verificação do teorema através de malha quadriculada confeccionada na folha de papel A4 colorida.

Inicialmente foi feito um rápido apanhado sobre o contexto histórico em relação ao teorema de Pitágoras e as demonstrações que seriam realizadas, sob a orientação do professor os grupos foram divididos, cada grupo contendo seis alunos, os mesmos ficaram responsáveis por confeccionar as peças necessárias para sua demonstração ou verificação mediante um "passo-a-passo" fornecido pela professora. O "passo-a-passo" entregue aos alunos foi feito em uma folha de papel A4 branca contendo as informações necessárias para conseguir chegar à demonstração proposta do teorema.

Ao fim, todos os grupos conseguiram realizar as demonstrações, alguns com maiores dificuldades do que outros, devido às diferenças na complexidade de cada uma das demonstrações. Como conclusão da atividade os resultados de cada grupo foram socializados com a turma e cada um teve oportunidade de comentar sobre sua experiência nessa atividade.

Mediante a experiência realizada, pudemos identificar que os alunos aprenderam de forma mais significativa através da manipulação dos materiais concretos do que simplesmente através de manipulações algébricas, me arrisco a afirmar que uma é o complementar da outra. Os alunos socializaram que a tarefa em grupo e com materiais concretos os levaram de fato a uma compreensão do teorema.

CONTEXTO HISTÓRICO SOBRE O TEOREMA DE PITÁGORAS

Como introdução a nossa oficina, optamos por trazer o texto de Lima (2006) que discorre sobre a história de Pitágoras e do famoso teorema que leva seu nome:

Pitágoras (c.569 – c.48 a.C.) nasceu na ilha de Samos, perto de Mileto, onde 50 anos antes tinha nascido Tales. Foi a partir das ideias desses dois grandes personagens que a matemática se iniciou como ciência e pôde se desenvolver enormemente nos séculos seguintes.

Pitágoras viajou bastante. Esteve no Egito e na Babilônia (talvez tenha ido até a Índia), onde absorveu os conhecimentos matemáticos e as ideias religiosas de cada região. Voltando ao mundo grego, fundou em Crotona (sudeste da Itália de hoje) uma escola, na verdade uma sociedade secreta, dedicada ao estudo da Matemática e da Filosofia, principalmente. Como todos os documentos daquela época se perderam, tudo o que sabemos veio através de referências de outros autores que viveram séculos depois. Por isso, Pitágoras é uma figura obscura na história da Matemática e, para dificultar ainda mais as coisas, a sua escola, além de secreta, eram comunitárias, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas eram comuns, pertenciam a todos. Assim, não sabemos sequer se foi o próprio Pitágoras que descobriu o teorema que leva o seu nome, pois era comum naquela época dar todo o crédito de uma descoberta ao mestre.

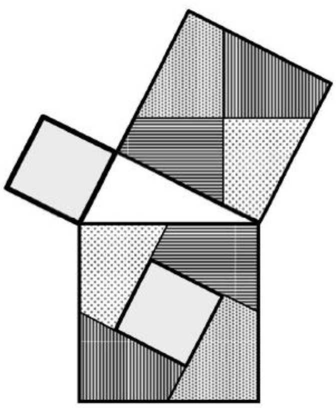
Não conhecemos também qual foi à demonstração original, mas historiadores acreditam que deva ter sido alguma usando áreas.

Feita a introdução histórica descrita acima, foi entregue aos alunos o "passo-a-passo" de cada demonstração, resgatando sempre o enunciado proposto por Pitágoras.

"Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos."

DEMONSTRAÇÃO DE HENRY PERIGAL

Em 1873 a demonstração de Henry Perigal foi publicada em Londres, como observada na figura abaixo (Figura 1). Trata-se da forma mais evidente de mostrar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos preenchem o quadrado construído sobre a hipotenusa. Perigal corta o quadrado construído sobre o maior cateto por duas retas passando pelo seu centro, uma paralela à hipotenusa do triângulo e outra perpendicular, dividindo esse quadrado em quatro partes congruente. Essas quatro partes, mais o quadrado construído sobre o menor cateto, preenchem completamente o quadrado construído sobre a hipotenusa. Perigal se orgulhou tanto de sua contribuição, de tal modo que mandou lapidar em seu túmulo um diagrama que representa sua demonstração.

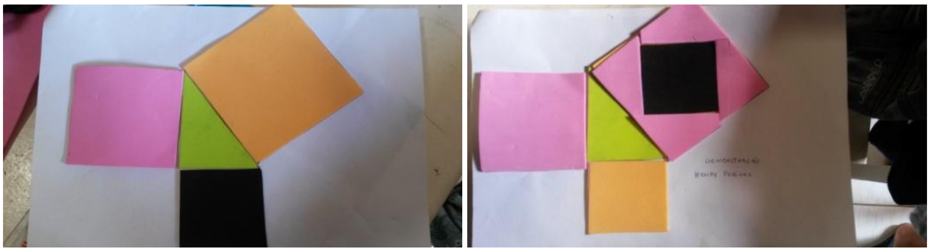


(figura 1)

“Passo-a-passo” entregue aos alunos para a demonstração proposta por Henry Perigal.

1- Construa um triângulo abc e seus respectivos quadrados utilizando a medida de seus lados.
2- Ache o ponto médio do maior cateto.
3- Trace uma reta paralela à hipotenusa do triângulo abc.
4- Trace outra reta perpendicular a construída anteriormente.
5- Recorte os traços feitos.
6- Sobreponha os cortes dos catetos sobre a hipotenusa.
7- O que você notou?

Nessa demonstração o corte feito, tem que ser preciso como descritos no “passo-a-passo” o grupo dos alunos responsáveis por essa demonstração alcançaram o êxito proposto que era constatar o teorema, através do “passo-a-passo” indicado, como evidenciado nas fotos abaixo.

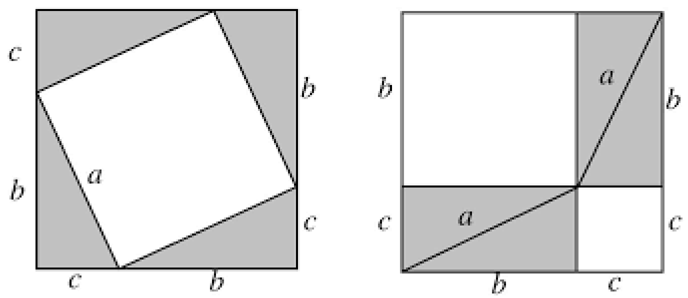


(Acervo do autor)

DEMONSTRAÇÃO CLASSICA

Nessa demonstração o intuito e chegar o que está indicando os quadrados HIJK e QRST, para demonstrar o teorema. Observe a (figura 2).

H I Q R



J K S T

(figura 2)

Os dois quadrados têm a mesma área, já que seus lados têm a mesma medida (b + c). A área do quadrado HIJK é: $a^2 + 4.\frac{b.c}{2}$ (I).

A área do quadrado QRST é: $b^2 + c^2 + 4.\frac{b.c}{2}$ (II).

Igualando as duas equações temos:

$$a^2 + 4.\frac{b.c}{2} = b^2 + c^2 + 4.\frac{b.c}{2}$$

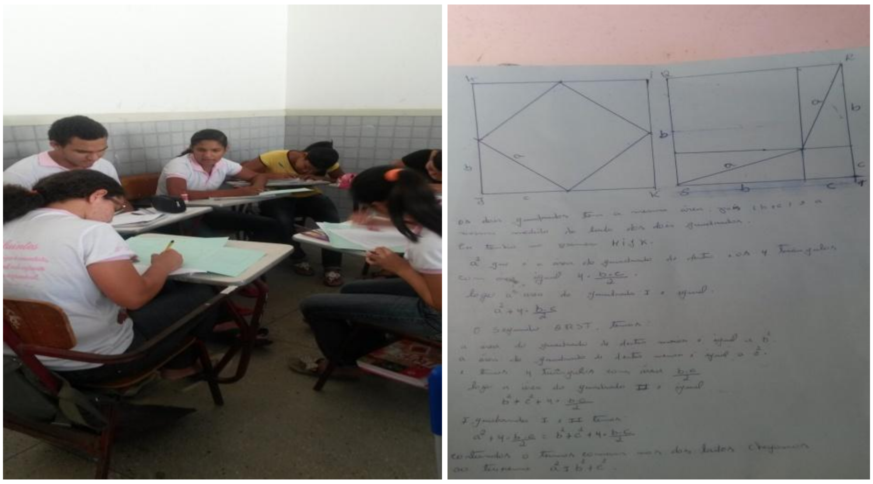
Subtraindo $4.\frac{b.c}{2}$ dos dois membros temos: $a^2 = b^2 + c^2$

Portanto demonstramos que um triângulo retângulo qualquer a somo dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Para os alunos nessa demonstração demos o seguinte “passo-a-passo”.

1- Construa dois quadrados congruentes de lados com medidas de b + c.
2- No primeiro quadrado forme triângulos de lados abc nas extremidades do quadrado.
3- Construa retângulos de lados iguais a b e c respeitando como medidas de b e c as mesmas No segundo quadrado dos triângulos do primeiro quadrado.
4- Trace a diagonal nos retângulos construídos no segundo quadrado.
5- Agora compare a área das figuras do primeiro quadrado com a área das figuras do segundo quadrado.
6- O que você notou?

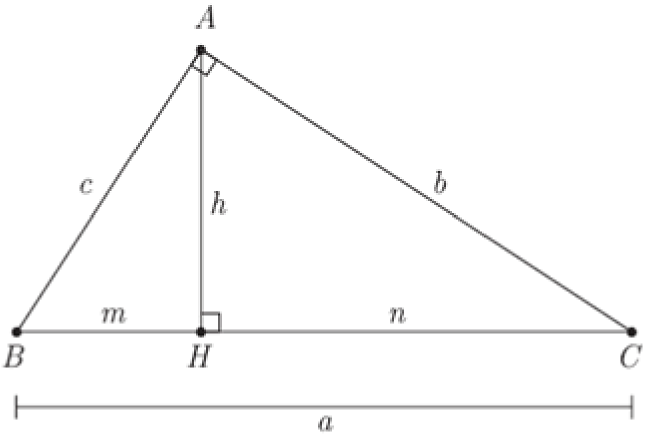
A demonstração envolvendo a área dos quadrados foi tranquilo para alguns alunos dos grupos e outros não, mesmo assim todos em conjuntos alcançaram o objetivo que é demonstrar o teorema. Os alunos notaram que os triângulos apesar de estar desenhado de forma diferente nos quadrados possuem a mesma a área sendo eles de igual tamanho, assim sendo notificados todos os passos evidencia-se a demonstração.



(Acervo do autor)

DEMONSTRAÇÃO POR SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Para essa demonstração utilizamos o triângulo da (figura 3) abaixo. Um triângulo é denominado retângulo se um de seus ângulos é reto, ou seja, tem 90° graus. O lado de maior medida é denominado hipotenusa (a) e os outros dois lados de catetos (b e c).

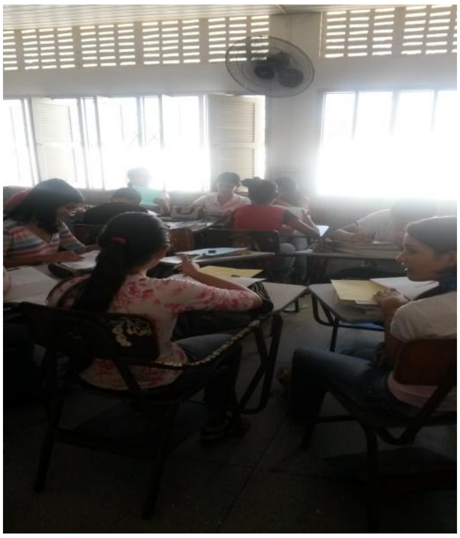


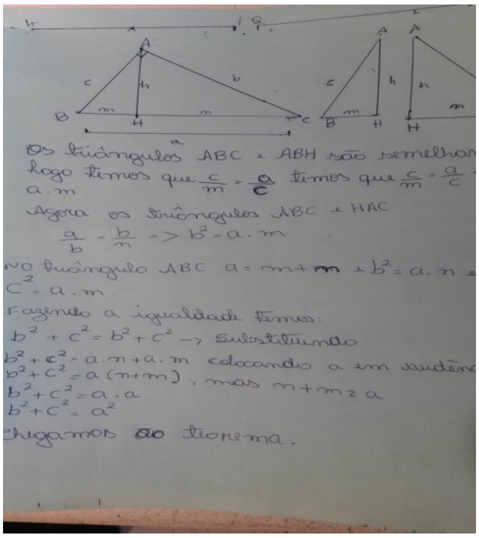
(figura 3)

Para essa demonstração usamos um “passo-a-passo” mais descritivo tendo em vista uma maior complexidade no entendimento dos alunos.

1- Com base no triângulo que foi dado separe-os e descreva-os.
2- Observe que os triângulos ABH e ABC eles são semelhantes, como decorrência do critério AA, uma vez que ambos possuem um ângulo reto e o ângulo B em comum. Daí construa-os e analise as relações entre os lados homólogos: (as relações que os alunos devem encontrar são as seguintes: $\frac{c}{m}=\frac{a}{c}=\frac{b}{h}$ dessa igualdade temos que $\frac{c}{m}=\frac{a}{c}$, logo $c^2 = a.m$.
3- Agora considere o triângulo ABC e HAC. Nessa relação os alunos devem encontrar que $\frac{AB}{HA}=\frac{BC}{AC}=\frac{AC}{HC}$ e respectivamente temos $\frac{c}{h}=\frac{a}{b}=\frac{b}{n}$ dessa igualdade temos que: $\frac{a}{b}=\frac{b}{n}$, daí, $b^2 = a.n$.
4- Dessa forma com as relações encontradas é só efetuar a soma entre $b^2 + c^2$. Então temos que, $b^2 = a.n$ e $c^2 = a.m$ e que $a = n + m$.
   Então, $b^2 + c^2 = a.n + a.m$
   $= a.(n + m)$ (colocando a em evidencia)
   $= a.a$ (substituindo n + m por a)

Dessa forma chegamos à demonstração em que $a^2 = b^2 + c^2$ como queríamos. Nessa demonstração os alunos envolvidos necessitaram um pouco mais de atenção, pois, muitos tiveram dificuldade de compreender as relações métricas dos triângulos, mesmo assim o grupo chegou ao resultado final demonstrando o teorema.

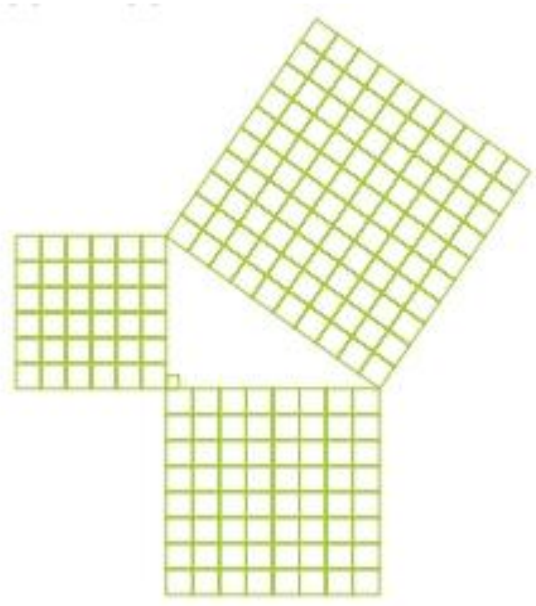




(Acervo do autor)

VERIFICAÇÃO DO TEOREMA NA MALHA QUADRICULADA

Nessa verificação usamos folhas de papel A4 riscadas como malha quadriculada com quadrados de 1 cm. Observe a (figura 4).



(figura 4)

“Passo-a-passo”

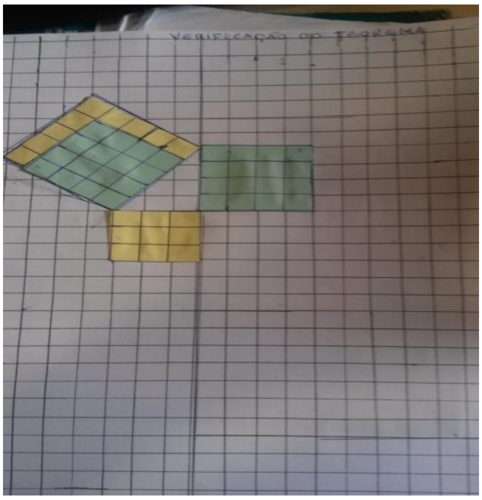
1-Construa um triângulo abc retângulo na malha quadriculada. (Medidas Inteiras de seus lados).

2- Corte os quadrados dos catetos.

3- Monte os quadrados dos catetos no quadrado da hipotenusa, o corte tem que respeita o inteiro de cada quadrado de 1 cm pelo menos.

4- O que você verificou?

Essa verificação foi bem simples e todos os alunos verificaram diretamente o teorema, o que variou foram os cortes, e todos relataram a facilidade de chegar ao teorema. Para essa verificação utilizamos com os alunos o “passo-a-passo” descrito logo acima onde os mesmos constataram a relação direta em que $a^2 = b^2 + c^2$.



(Acervo do autor)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao fim deste trabalho observamos que as manipulações algébricas por si só, deixa muito a desejar no quesito ensino aprendizado. Ao executar as demonstrações geométricas com o material didático manipulável, e fazer a relação ao que já havia sido visto em sala de aula algebricamente, constatou-se com os alunos que essa relação de entendimento ficou bem mais compreensível, pois, os alunos puderam vivenciar e concretizar o que de fato é a relação do teorema em que num triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa chegando à relação métrica $a^2 = b^2 + c^2$.

Com a realização dessa experiência, pudemos identificar que o aprendizado dos alunos se deu de forma mais significativa através da manipulação dos materiais concretos do que simplesmente através de manipulações algébricas, pude percebe que uma pode ser o complementar da outra, fazendo com que os nossos alunos tenham mais oportunidades de adquiri o conhecimento. Os alunos participantes da oficina socializaram que de fato agora não mais esqueceriam a relação, pois, a tarefa em grupo e com materiais concretos os levaram a uma compreensão significativa do teorema.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, David P.; NOVAK, Joseph D.; HANESIAN, Helen. **Psicologia Educacional**. Rio de Janeiro: Editora Interamericana Ltda, 1980.

LIMA, Elon Lages et al. **Temas e Problemas Elementares.** 12. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2006.

LINDQUIST, Mary M.; SHULTE, Alberto P., orgs. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

LORENZATO, Sérgio Aparecido. **Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis.** In: LORENZATO, Sérgio (org.). **O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas:Autores associados, 2006.

TURRIONI, Ana Maria Silveira. **O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores.** 2004, p.175. Dissertação de Mestrado.UNESP, Rio Claro.